

Capítulo 1

P 1.3

Resolução:

Vamos observar que:

$$\lim_{x \rightarrow 1_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1_-} (2 - x) = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1_+} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

Como os limites laterais são diferentes, dizemos que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

P 1.5

Resolução:

De acordo com a definição de limites no infinito (1.9.4), devemos verificar se dado um número real $\varepsilon > 0$, podemos determinar um número real $M > 0$, tal que para todo

$x > M$, temos que $|f(x) - 0| < \varepsilon$, ou seja, $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

De fato, se queremos que $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow -x\varepsilon < 1 < x\varepsilon$, para $x > 0$, ou seja, $1 < x\varepsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$. Vamos escolher, neste caso, $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Logo, sempre que $x > M$, temos que $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Resposta: $\delta = 0,0005$.

P 1.7

Resolução:

Se queremos $|f(x) + 3| < \varepsilon$, então:

$$|(1 - 4x) + 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |4 - 4x| < \varepsilon \Leftrightarrow |4(1 - x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|1 - x| < \varepsilon/4$$

Vamos escolher $\delta = \varepsilon/4$ e $|1 - x| = |x - 1| < \varepsilon/4$.

P 1.9

Resolução:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^3 + 3x - 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 3x - 4)} = \sqrt{(3^3 + 3 \cdot 3 - 4)} = \sqrt{27 + 9 - 4} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2};$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{x^4 + x^3}{x+1} = \frac{(-1/2)^4 + (-1/2)^3}{(-1/2)+1} = \frac{1/16 - 1/8}{1/2} = \frac{2}{1} \times \left(\frac{1}{16} - \frac{2}{16}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{8};$
- c) $\lim_{x \rightarrow 3\pi/4} (\sin x + \cos x - \sec x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2};$
- d) $\lim_{x \rightarrow 5} [\log_3(x^3 - 8x - 4)] = \log_3\left(\lim_{x \rightarrow 5} (x^3 - 8x - 4)\right) = \log_3(5^3 - 8 \cdot 5 - 4) = \log_3(125 - 40 - 4) = \log_3(81) = 4;$
- e) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{3x^3 - 5x^2 - x - 2}{4x+3}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3x^3 - 5x^2 - x - 2}{4x+3}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3(-2)^3 - 5(-2)^2 - (-2) - 2}{4(-2)+3}\right)} = \sqrt{\frac{-44}{-5}} = \sqrt{8,8}$

P 1.11

Resolução:

- a) Primeiro devemos verificar se é um limite indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 9x + 9}{x+3} = \frac{2(-3)^2 + 9(-3) + 9}{(-3)+3} = \frac{18 - 27 + 9}{0} = \frac{0}{0}$$

Neste caso, vamos fatorar o numerador, achando as raízes pela fórmula de Bháskara,

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{-9 \pm 3}{4} = \begin{cases} x' = -3 \\ x'' = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 9x + 9}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{1} = 2\left(-3+\frac{3}{2}\right) \\ &= -6+3 = -3 \end{aligned}$$

- b) Primeiro devemos verificar se é um limite indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{2^3 - 8}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Lembrando que:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{1} = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x-3}{4x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x-3}{(2x-3)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6};$$

c) Primeiro devemos verificar se é um limite indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \frac{3 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 1 + 2}{2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{0}{0}$$

Como se trata de polinômios do 3º grau em que uma das raízes é $x = 1$, vamos fazer a divisão de polinômios por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 4x^2 - x + 2 & x - 1 \\ -3x^3 + 3x^2 & 3x^2 - x - 2 \\ \hline -x^2 - x + 2 & \\ x^2 - x & \\ \hline -2x + 2 & \\ 2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + 1 & x - 1 \\ -2x^3 + 2x^2 & 2x^2 - x - 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ x^2 - x & \\ \hline -x + 1 & \\ x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{(x-1)(2x^2 - x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - x - 2)}{(2x^2 - x - 1)} = \frac{3 \cdot 1^2 - 1 - 2}{2 \cdot 1^2 - 1 - 1} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Então devemos continuar fatorando e agora podemos aplicar Bháskara, para $3x^2 - x - 2 = 0$, temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6} = \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

E para $2x^2 - x - 1 = 0$, temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - x - 2)}{(2x^2 - x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\left(x + \frac{2}{3}\right)}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{3\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{3+2}{2+1} \\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

d) Primeiro devemos verificar se é um limite indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}} = \sqrt{\frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 4}{2 \cdot 2^2 - 4}} = \frac{0}{0}$$

Como o limite da raiz é a raiz do limite, vamos fatorar dentro da raiz. Lembrando que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ e $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x+2)}} \\ &= \sqrt{\frac{0}{4}} = 0\end{aligned}$$

P 1.14

Resolução:

- a) Vamos usar o produto notável $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ em duas situações: multiplicando e dividindo a expressão por $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x}$ e fatorando o termo $9 - x^2$ para posterior simplificação:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{2x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x})}{(9 - x^2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x})} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{2x})^2}{(9 - x^2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3 - 2x}{(3 - x)(3 + x)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{3} - x}{(\cancel{3} - x)(3 + x)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(3 + x)(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x})} = \frac{1\sqrt{6}}{6 \cdot (2\sqrt{6})\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{72} \end{aligned}$$

Resposta: $\frac{\sqrt{6}}{72}$.

- b) Vamos usar o produto notável $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ em duas situações: multiplicando e dividindo a expressão por $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}$ e fatorando o termo $x^2 - 4$ para posterior simplificação:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{3x-2})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{(x + 2) - (3x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{x + 2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{-2x + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{x} - 2)(x + 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{-2(\cancel{x} - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{-2} = \frac{4(2 + 2)}{-2} = -8 \end{aligned}$$

Resposta: -8.

- c) Vamos usar o produto notável $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ multiplicando e dividindo a expressão por $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5}$ e vamos fatorar o denominador aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes, lembrando que se as raízes são x' e x'' então $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5})(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x + 3})^2 - (\sqrt{5})^2}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 3 - 5}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x - 2)(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{5}}{(-1)(2\sqrt{5})\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Resposta: $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

- d) Vamos usar o produto notável $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ multiplicando e dividindo a expressão por $\sqrt{x^2 + x + 2} + 2$ e vamos fatorar o denominador aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes, lembrando que se as raízes são x' e x'' então $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x' = -3 \\ x'' = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}{(x^2 + 2x - 3)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2})^2 - 2^2}{(x + 3)(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2 - 4}{(x + 3)(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x + 3)(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \end{aligned}$$

Vamos agora fatorar o numerador aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes,

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x' = -2 \\ x'' = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x+3)(x-1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x+3)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} = \frac{3}{(4)(2+2)} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Resposta: $\frac{3}{16}$.

e) Vamos usar o produto notável $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ multiplicando e dividindo a expressão por $\sqrt{x^2 + 15} + (7x - 3)$ e vamos fatorar o denominador aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes, lembrando que se as raízes são x' e x'' então $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$:

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x' = -2 \\ x'' = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 15} - 7x + 3}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 15} - (7x - 3)}{x^2 + x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{x^2 + 15} - (7x - 3)][\sqrt{x^2 + 15} + (7x - 3)]}{(x^2 + x - 2)[\sqrt{x^2 + 15} + (7x - 3)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{x^2 + 15}]^2 - [(7x - 3)^2]}{(x+2)(x-1)[\sqrt{x^2 + 15} + (7x - 3)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 15 - [49x^2 - 42x + 9]}{(x+2)(x-1)[\sqrt{x^2 + 15} + (7x - 3)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-48x^2 + 42x + 6}{(x+2)(x-1)[\sqrt{x^2 + 15} + (7x - 3)]} \end{aligned}$$

Vamos agora fatorar o numerador aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes,

$$-48x^2 + 42x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-(42) \pm \sqrt{(42)^2 - 4 \cdot (-48) \cdot 6}}{2 \cdot (-48)} = \frac{-42 \pm 54}{-96}$$

$$= \begin{cases} x' = -\frac{1}{16} \\ x'' = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-48x^2 + 42x + 6}{(x+2)(x-1)[\sqrt{x^2+15} + (7x-3)]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-48(x + 1/16)(x-1)}{(x+2)(x-1)[\sqrt{x^2+15} + (7x-3)]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-48(x + 1/16)}{(x+2)[\sqrt{x^2+15} + (7x-3)]} = \frac{-48-3}{(3)(4+4)} = \frac{-51}{24} = -\frac{17}{8}
\end{aligned}$$

Resposta: $-\frac{17}{8}$.

- f) Vamos usar o produto notável $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ multiplicando e dividindo a expressão por $\sqrt{2x^2 + x + 1} + (3x - 1)$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1} - 3x + 1}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1} - (3x - 1)}{1 - x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{2x^2 + x + 1} - (3x - 1)][\sqrt{2x^2 + x + 1} + (3x - 1)]}{(1 - x)[\sqrt{2x^2 + x + 1} + (3x - 1)]} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x^2 + x + 1})^2 - (3x - 1)^2}{(1 - x)[\sqrt{2x^2 + x + 1} + (3x - 1)]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1 - (3x - 1)}{(1 - x)[\sqrt{2x^2 + x + 1} + (3x - 1)]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{(1 - x)[\sqrt{2x^2 + x + 1} + (3x - 1)]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x(1 - x)}{(1 - x)[\sqrt{2x^2 + x + 1} + (3x - 1)]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{[\sqrt{2x^2 + x + 1} + (3x - 1)]} = \frac{-2}{2 + 2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Resposta: $-\frac{1}{2}$.

- g) Vamos usar o produto notável $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ multiplicando e dividindo a expressão simultaneamente por $\sqrt{x+3} + 2$ e $3 + \sqrt{x^2+8}$ e depois vamos usar o produto notável para simplificar a expressão:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(3+\sqrt{x^2+8})}{(3-\sqrt{x^2+8})(\sqrt{x+3}+2)(3+\sqrt{x^2+8})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(\sqrt{x+3})^2 - (2)^2](3+\sqrt{x^2+8})}{(\sqrt{x+3}+2)[(3)^2 - (\sqrt{x^2+8})^2]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x+3-4](3+\sqrt{x^2+8})}{(\sqrt{x+3}+2)[9-(x^2+8)]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x-1](3+\sqrt{x^2+8})}{(\sqrt{x+3}+2)[1-x^2]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x-1](3+\sqrt{x^2+8})}{(\sqrt{x+3}+2)(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1)(3+\sqrt{x^2+8})}{(\sqrt{x+3}+2)(1+x)} \\
&= \frac{(-1) \cdot 3}{(2+2)(2)} = -\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Resposta: $-\frac{3}{8}$.

P 1.16

Resolução:

- a) Neste caso, vamos usar a mesma técnica do exercício anterior, multiplicando pelo conjugado para resolver o limite, ou seja, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\infty + \infty} = 0
\end{aligned}$$

Resposta: 0.

Observação:

Note que para funções polinomiais, ou seja, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

- b) Colocando o termo de maior grau em evidência:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 7}{3x^2 + 4x - 9} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)}{\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}\right)} = 4 \cdot \infty = \infty\end{aligned}$$

Resposta: ∞ .

$$\begin{aligned}\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)^3 - x^3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{-3x^2 + 3x - 1} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Resposta: $-\frac{2}{3}$.

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Resposta: 0.

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 15}{\sqrt{x^4 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Resposta: 2.

P 1.18

Resolução:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x-1}{5x+3}$$

- 1) Vamos procurar assíntota horizontal. Para isso, vamos passar o limite quando x tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{5x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{5x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

Logo, $y = \frac{2}{5}$ é a reta assíntota horizontal.

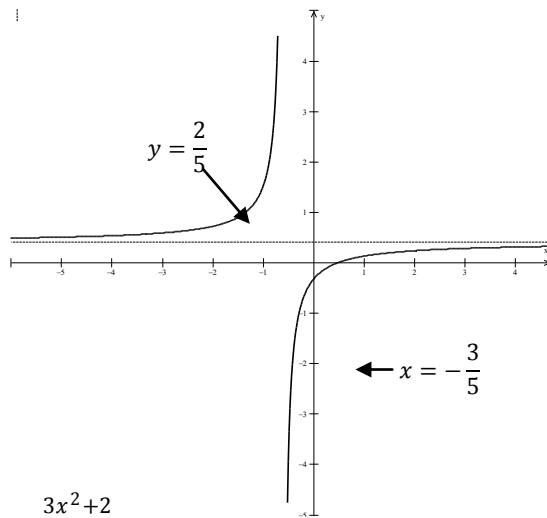
- 2) Vamos procurar assíntota vertical. Para isso, vamos passar os limites laterais no ponto $x = -\frac{3}{5}$, que não pertence ao domínio da função, pois é o ponto onde o denominador é zero:

$$\lim_{x \rightarrow -3/5+} \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{2 \cdot (-3/5) - 1}{-2,99 \dots + 3} = \frac{-11/5}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3/5_-} \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{2 \cdot (-3/5) - 1}{-3,01 \dots + 3} = \frac{-11/5}{0^-} = +\infty$$

Logo, a reta $x = -\frac{3}{5}$ é assíntota vertical do gráfico da função.

3) Apresentando o gráfico:



b) $f(x) = \frac{3x^2+2}{2x^2-5x}$

1) Vamos procurar assíntota horizontal. Para isso, vamos passar o limite quando x tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2}{2x^2-5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+2}{2x^2-5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

Logo, $y = \frac{3}{2}$ é assíntota horizontal.

2) Para procurar assíntota vertical, devíamos procurar o ponto onde o denominador é zero. $2x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(2x - 5) = 0 \rightarrow x = 0$ e $x = \frac{5}{2}$. Para isso, vamos passar os limites laterais nos pontos $x = 0$ e $x = \frac{5}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{3x^2+2}{2x^2-5x} = \frac{3 \cdot (0)^2 + 2}{2 \cdot 0,00 \dots 1 - 5 \cdot 0,00 \dots 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

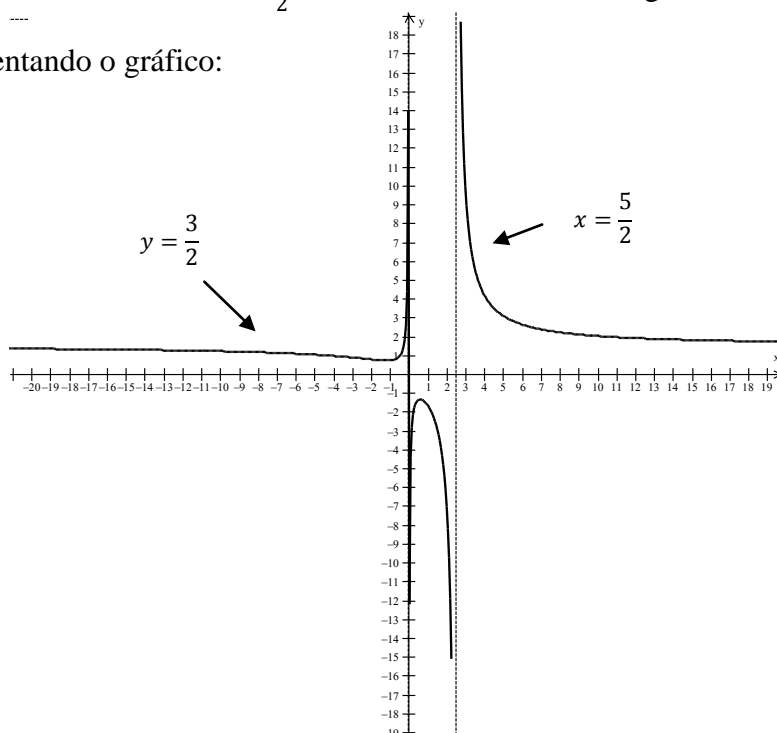
$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{3x^2+2}{2x^2-5x} = \frac{3 \cdot (0)^2 + 2}{2 \cdot (-0,00 \dots 1 - 5 \cdot (-0,00 \dots 1))} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5/2^+} \frac{3x^2 + 2}{2x^2 - 5x} = \frac{3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{83/4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5/2^-} \frac{3x^2 + 2}{2x^2 - 5x} = \frac{3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{83/4}{0^-} = -\infty$$

Logo, as retas $x = 0$ e $x = \frac{5}{2}$ são assíntotas verticais do gráfico da função.

3) Apresentando o gráfico:



P 1.20

Resolução:

- a) Para utilizar o limite fundamental trigonométrico, vamos multiplicar e dividir a expressão por x :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x^2 - \sin x} \times \frac{x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x} \times \frac{x}{x^2 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x} \div \frac{x^2 - \sin x}{x} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + 1}{\lim_{x \rightarrow 0} x - \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 + 1}{0 - 1} = -2 \end{aligned}$$

Resposta: -2 .

- b) Para utilizar o limite fundamental trigonométrico, vamos multiplicar e dividir a expressão por 5:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \times 3 \sin(5x)}{5 \times 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15 \cdot \sin(5x)}{4(5x)} = \frac{15}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{(5x)} = \frac{15}{4} \cdot 1 = \frac{15}{4}$$

Resposta: $\frac{15}{4}$.

- c) Vamos utilizar a definição de tangente para usar o limite fundamental e depois multiplicar e dividir a expressão por 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x} \times \frac{1}{\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \sin(2x)}{2 \times (5x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \sin(2x)}{5 \times (2x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} \\ &= \frac{2}{5} \times 1 \times 1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Resposta: $\frac{2}{5}$.

- d) Vamos aplicar a propriedade de potenciação e fazer a substituição: $\frac{3}{4x} = \frac{1}{t}$ e daí temos que $x = \frac{3t}{4}$ e o limite: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$, logo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{4x}\right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{3}{4x}\right)^x\right]^2 = \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{3t}{4}}\right]^2 \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{2 \cdot \frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Resposta: $e^{\frac{3}{2}}$.

- e) Vamos aplicar a propriedade de potenciação e fazer a substituição: $-\frac{5}{2x} = \frac{1}{t}$ e daí temos que $x = -\frac{5t}{2}$ e o limite: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow -\infty$, logo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{2x}\right)^{4x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{5}{2x}\right)^x\right]^4 = \left[\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-\frac{5t}{2}}\right]^4 \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = e^{-10}\end{aligned}$$

Resposta: e^{-10} .

- f) Vamos aplicar a propriedade de potenciação e fazer a substituição: $\frac{1}{5x} = \frac{1}{t}$ e daí temos que $x = \frac{t}{5}$ e o limite: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow -\infty$, logo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x\right]^3 = \left[\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{5}}\right]^3 = \left[\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{3}{5}} \\ &= e^{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

Resposta: $e^{\frac{3}{5}}$.

- g) Aplicando a propriedade de potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5^2)^x - 1}{3x} = \frac{1}{3} \ln(5^2) = \frac{2}{3} \cdot \ln 5$$

Resposta: $\frac{2}{3} \cdot \ln 5$.

- h) Aplicando a propriedade de potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{4x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^4)^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \ln(3^4) = \frac{4}{2} \cdot \ln 3$$

Resposta: $2 \cdot \ln 3$.

- i) Para utilizar o limite fundamental trigonométrico, vamos multiplicar e dividir a expressão por x :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{\sin x} \times \frac{x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{x} \times \frac{x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{x} \div \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin(3x)}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(2x)}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{3 - 2}{1} = 1\end{aligned}$$

Resposta: 1.

- j) Vamos colocar 2^x em evidência e, em seguida, aplicar algumas propriedades de potenciação:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \left(\frac{3^x}{2^x} - 1 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \left(\left(\frac{3}{2} \right)^x - 1 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\left(\frac{3}{2} \right)^x - 1 \right)}{x} \\ &= 2^0 \cdot \ln \left(\frac{3}{2} \right) = 1 \cdot \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln 3 - \ln 2\end{aligned}$$

Resposta: $\ln 3 - \ln 2$.

- k) Vamos aplicar algumas propriedades de logaritmo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1\end{aligned}$$

Resposta: 1.

- l) Neste caso, vamos multiplicar pelo conjugado para resolver o limite, ou seja, aplicar o produto notável, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3 + \cos^2 x} - 2)(\sqrt{3 + \cos^2 x} + 2)}{x^2(\sqrt{3 + \cos^2 x} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3 + \cos^2 x})^2 - (2)^2}{x^2(\sqrt{3 + \cos^2 x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \cos^2 x - 4}{x^2(\sqrt{3 + \cos^2 x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\sqrt{3 + \cos^2 x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(\sqrt{3 + \cos^2 x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right) \frac{1}{(\sqrt{3 + \cos^2 x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{3 + \cos^2 x} + 2)} \\ &= (-1) \times 1 \times \frac{1}{2 + 2} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Resposta: $-\frac{1}{4}$.

- m) Vamos multiplicar pelo conjugado $\sqrt{4 + \sin x} + \sqrt{4 - 3 \sin x}$ para resolver o limite, ou seja, aplicar o produto notável, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4 + \sin x} - \sqrt{4 - 3 \sin x})(\sqrt{4 + \sin x} + \sqrt{4 - 3 \sin x})}{x(\sqrt{4 + \sin x} + \sqrt{4 - 3 \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4 + \sin x})^2 - (\sqrt{4 - 3 \sin x})^2}{x(\sqrt{4 + \sin x} + \sqrt{4 - 3 \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 + \sin x) - (4 - 3 \sin x)}{x(\sqrt{4 + \sin x} + \sqrt{4 - 3 \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{x(\sqrt{4 + \sin x} + \sqrt{4 - 3 \sin x})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 4 \left(\frac{\sin x}{x} \right) \frac{1}{(\sqrt{4 + \sin x} + \sqrt{4 - 3 \sin x})} \\
&= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{4 + \sin x} + \sqrt{4 - 3 \sin x})} \\
&= 4 \times 1 \times \frac{1}{2 + 2} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

Resposta: 1.

- n) Vamos multiplicar simultaneamente pelos conjugados $(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)$ e $(1 + \cos x)$ para resolver o limite, ou seja, aplicar o produto notável, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)}{(1 + \cos x)(\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)}{(\sqrt{1 + \sin^2 x})^2 - (\cos x)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)}{1 + \sin^2 x - \cos^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)}{2 \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \right) (\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1
\end{aligned}$$

Resposta: 1.

- o) Vamos multiplicar pelo conjugado $(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)$ para resolver o limite, ou seja, aplicar o produto notável, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)}{\sin^2 x (\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \sin^2 x})^2 - (\cos x)^2}{\sin^2 x (\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x (\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x (\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 x (\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{1}{(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} = 2 \cdot \frac{1}{(1 + 1)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Resposta: 1.

p) Vamos aplicar algumas propriedades de logaritmo, depois fazer a substituição

$t = 5x$ e, nesse caso, $x = \frac{t}{5}$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 5x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 + t)^{\frac{5}{t}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln \left(\frac{x + 1}{x} \right) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right]^5 = \ln \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right]^5 = \ln e^5 = 5 \cdot \ln e
\end{aligned}$$

Resposta: 5.